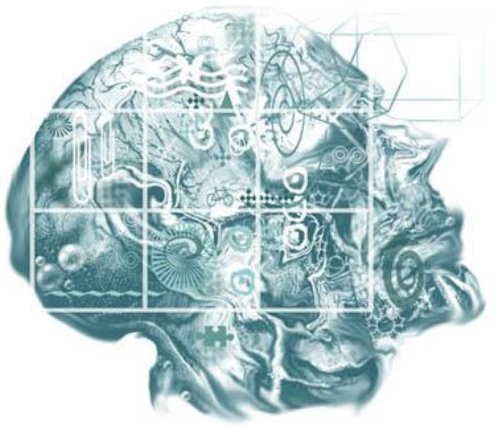

บทที่ 3 การวางแผน ความไม่แน่นอนกับการหาเหตุผลจากความรู้ (Planning Uncertainly with Reasoning from Knowledge)

นำเสนอโดย
ผู้ช่วยsdfศาสตราจารย์จุฑาวุฒิ จันทรมาลี
หลักสูตรวิทยาการคอมพิวเตอร์
มหาวิทยาลัยสวนดุสิต

การแทนความรู้โดยตรรกะเพรดิเคต

- *การแทนความรู้ (knowledge representation)* ในปัญญาประดิษฐ์มีหลายวิธีด้วยกัน เช่น
- กรอบ (**frame**) ข่ายงานความหมาย (**semantic network**) เป็นต้น ในบทนี้จะกล่าวถึงการ
- แทนความรู้ที่มีการใช้กันอย่างแพร่หลายวิธีหนึ่งในปัญญาประดิษฐ์ ซึ่งเรียกว่า *ตรรกะ-*
- *เพรดิเคต (predicate logic)*

ตรรกะเพรดิเคต (PREDICATE LOGIC)

ตรรกะเพรดิเคต (Predicate Logic) เป็นภาษาหนึ่งที่มีวากยสัมพันธ์ (Syntax) และความหมาย (Semantics) ของภาษาที่กำหนดขึ้นอย่างชัดแจน ซึ่งสามารถเรียกสูตรที่ถูกต้องตามวากยสัมพันธ์ของภาษานี้ว่า <u>สูตรรูปดี (well form formula)</u> โดยภาษานี้ประกอบด้วยสัญลักษณ์พื้นฐาน ดังนี้

- สัญลักษณ์แสดงเพรดิเคต (predicate symbol) ใช้สายอักขระตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป และขึ้นต้นด้วยตัวอักษรใหญ่ เช่น P, Q, R เป็นต้น
- สัญลักษณ์แสดงตัวแปร (variable symbol) ใช้สายอักขระตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไปและขึ้นต้นด้วยตัวอักษรเล็ก เช่น x, y, z เป็นต้น
- สัญลักษณ์แสดงฟังก์ชัน (function symbol) ใช้สายอักขระตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไปและขึ้นต้นด้วยตัวอักษรเล็ก เช่น f, g, h เป็นต้น
- สัญลักษณ์แสดงค่าคงที่ (constant symbol) ใช้สายอักขระตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไปและขึ้นต้นด้วยตัวอักษรใหญ่ เช่น A, B, C เป็นต้น
- เครื่องหมายวงเล็บ เช่น [ ], { }, ( ) เป็นต้น

ตรรกะเพรดิเคต (PREDICATE LOGIC)

สูตรรูปดีที่เล็กที่สุดที่ถูกต้องตามที่มีวากยสัมพันธ์ (Syntax) และความหมาย(Semantics) ของภาษาที่กำหนดขึ้นอย่างชัดแจน เรียกสูตรภาษานี้ว่า <u>สูตรอะตอม (atomic formula</u>

FATHER(SOMCHAI,SOMSRI)

สูตรอะตอมประกอบด้วยสัญลักษณ์เพรดิเคตในที่นี้คือ 'FATHER' ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ 'พ่อ' ความสัมพันธ์นี้จะรับ*อาร์กิวเมนต์ (argument)* 2 ตัว คือ 'SOMCHAI' และ 'SOMSRI' ซึ่งอาร์กิวเมนต์ทั้งสองนี้เป็นค่าคงที่ สูตรอะตอมที่ถูกต้องตามวากยสัมพันธ์จะต้องประกอบด้วยเพรดิเคตและอาร์กิวเมนต์ตั้งแต่ 0 ตัวขึ้นไป โดยที่อาร์กิวเมนต์แต่ละตัวคั่นด้วยเครื่องหมาย ',' และอาร์กิวเมนต์ทั้งหมดต้องถูกคลุมด้วยเครื่องหมายวงเล็บ ลำดับของอาร์กิวเมนต์มีความสำคัญ ผู้เขียนต้องกำหนดลำดับเอง ในตัวอย่างนี้เราต้องการให้มีหมายความว่า คน 2 คนในโดเมนนี้ที่ชื่อ 'SOMCHAI' และ 'SOMSRI' มีความสัมพันธ์กันโดยที่ 'SOMCHAI' เป็นพ่อของ 'SOMSRI'

ตรรกะเพรดิเคต (PREDICATE LOGIC)

FATHER (x, y)

x และ y ซึ่งสูตรนี้แสดงว่า x เป็นพ่อของ y

HAS-MONEY (SOMCHAI, Salary (SOMCHAI))

สูตรนี้แสดงความสัมพันธ์ ‘HAS-MONEY’ ‘salary’ ที่ระบุพจน์จาก ‘SOMCHAI’ ซึ่งพจน์นี้อาจเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง เช่น 10850 เป็นต้น

ตรรกะเพรดิเคต (PREDICATE LOGIC)

การแปลความหมาย (interpretation) คือการกำหนดค่าให้กับเพรดิเคต ค่าคงที่ ตัวแปรฟังก์ชันในโดเมนนั้น ซึ่งการกำหนดค่าเหล่านี้จะเป็นตัวนิยามความหมายของสูตรอะตอม เช่นการแปลความหมายของสูตรที่ (3.3) คือการกำหนดให้ ‘SOMCHAI’ มีค่าคือคนที่ชื่อ สมชายในโดเมนของเรา กำหนดให้ ‘salary(SOMCHAI)’ มีค่าเท่ากับ 10850 บาทและกำหนดให้ ‘HAS-MONEY’ มีค่าเป็นการที่สมชายมีเงินเท่ากับ 10850 บาท เป็นต้น เมื่อเรา นิยามการแปลความหมายแล้ว เราสามารถบอกได้ว่าสูตรอะตอมตัวหนึ่งๆ มีค่าเป็น T (จริง) ถ้าความสัมพันธ์ที่ถูกแสดงด้วยสูตรนั้นเป็นจริงในโดเมนที่กล่าวถึง และจะมีค่าเป็น F (เท็จ) ถ้าไม่ใช่

ตัวเชื่อมและตัวบ่งปริมาณ

ภาษานี้มี*ตัวเชื่อม(connective)* และ*ตัวบ่งปริมาณ(quantifier)* เพื่อใช้เขียนความสัมพันธ์ได้ซับซ้อนยิ่งขึ้น ตรงกับความต้องการของเรามากขึ้น ตัวเชื่อมที่มีในภาษานี้ได้แก่

- *และ* แทนด้วยเครื่องหมาย $\wedge$
- *หรือ* แทนด้วยเครื่องหมาย $\vee$
- *อิมไพล* แทนด้วยเครื่องหมาย $\Rightarrow$
- *นิเสธ* แทนด้วยเครื่องหมาย $\sim$

ตัวเชื่อมเหล่านี้ทำหน้าที่เชื่อมสูตรอะตอมหลายตัวเข้าด้วยกัน เพื่อสร้างเป็นสูตรใหม่ที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง

ถ้าเราต้องการเขียนสูตรแทนประโยค ‘John lives in a yellow house.’ ก็อาจเขียนได้โดยใช้ตัวเชื่อม ∧ ดังนี้

LIVE(JOHN,HOUSE-1) ∧ COLOR(HOUSE-1,YELLOW) (3.4)

ตัวเชื่อม ⇒ ใช้เขียนประโยคเงื่อนไข (เช่น if … then … เป็นต้น) เช่นถ้าเราต้องการเขียนสูตรแทนประโยค ‘If the car belongs to John then it is green.’ ก็อาจเขียนได้โดยใช้ตัวเชื่อม ⇒ ได้ดังนี้

OWNS(JOHN,CAR-1) ⇒ COLOR(CAR-1,GREEN) (3.5)

ตัวเชื่อม ~ ใช้เปลี่ยนค่าความจริงของสูตร เช่นถ้าต้องการเขียนสูตรแทนประโยค ‘John did not write computer-chess.’ ก็เขียนได้ดังนี้

ตัวอย่าง

~WRITE(JOHN,COMPUTER-CHESS) (3.6)

เมื่อกำหนดการแปลความหมายของสูตรอะตอมแล้ว ค่าความจริงของสูตรที่ประกอบด้วยตัวเชื่อมสามารถหาได้โดยใช้ตารางค่าความจริงด้านล่างนี้ โดยที่ P และ Q แทนสูตรอะตอมหนึ่งๆ

ตารางที่ 3–1 ตารางค่าความจริง

P	Q	P∨Q	P∧Q	P⇒Q	~P
T	T	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T

นอกจากตัวเชื่อมแล้ว เรายังสามารถใช้ตัวบ่งปริมาณในการเขียนสูตรได้ ตัวบ่งปริมาณที่มีให้ในภาษานี้ได้แก่

- *ตัวบ่งปริมาณเอกภพ (universal quantifier)* แทนด้วยเครื่องหมาย ∀
- *ตัวบ่งปริมาณมีอยู่ (existential quantifier)* แทนด้วยเครื่องหมาย ∃

กฎการอนุมาน

เมื่อเราไปสังเกตปรากฏการณ์ สิ่งต่างๆ หรือความสัมพันธ์ต่างๆ ในโดเมนที่เราสนใจและนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของตรรกะเพรดิเคตได้แล้ว เราสามารถมองได้ว่าสิ่งที่เราเขียนในรูปของตรรกะเพรดิเคตก็คือ ความรู้ที่เราทราบในโดเมนนั้นๆ ขั้นตอนต่อไปซึ่งเป็นข้อดีของการแทนความรู้ก็คือ เราสามารถ*อนุมาน (inference)* เพื่อหาข้อเท็จจริงใหม่ๆ หรือผลสรุปที่แฝงอยู่ในความรู้นั้นได้ เราเรียกกฎที่ใช้อนุมานเพื่อหาความรู้ใหม่ว่า *กฎการอนุมาน (rule ofinference)* ซึ่งจะทำหน้าที่สร้างสูตรใหม่จากสูตรหลายๆ ตัวที่มีอยู่ กฎการอนุมานมีอยู่หลากหลายชนิด

ตัวอย่างของกฎการอนุมาน

กฎโมดัสโพเน็นส์ (Modus Ponens):	$\dfrac{W1 \Rightarrow W2 \quad W1}{W2}$
กฎเจาะจงตัวแปรเอกภพ (Universal Specialization):	$\dfrac{\forall x\ (W(x))}{W(A)}$

กฎข้อแรกหมายความว่า ถ้า ‘W1 ⇒ W2’ และ ‘W1’ *เป็น*จริงแล้ว สามารถสรุปได้ว่า‘W2’ จะเป็นจริงด้วย ส่วนกฎข้อที่สองหมายความว่า ถ้า ‘∀x (W(x))’ เป็นจริงแล้ว สามารถสรุปได้ว่า ‘W(A)’ จะเป็นจริงด้วย เมื่อ ‘A’ เป็นค่าคงที่ในโดเมนที่กล่าวถึง เราเรียกสูตรใหม่ที่เกิดขึ้นเรียกว่า *ทฤษฎี (theorem)* และลำดับของกฎการอนุมานที่ใช้ในการสร้างทฤษฎีว่า*การพิสูจน์ (proof)* ของทฤษฎีนั้น

ตัวอย่างของกฎการอนุมาน

ตัวอย่างเช่นจากสูตร 2 ตัวคือ ‘$\forall x\ (W1(x) \Rightarrow W2(x))$’ และ ‘$W1(A)$’ เราสามารถอนุมานได้ว่า ‘$W2(A)$’ เป็นจริงถ้าสูตร 2 ตัวบนเป็นจริง ‘$W2(A)$’ เป็นทฤษฎี ส่วนการพิสูจน์ก็คือลำดับของกฎการอนุมานด้านล่างนี้

ใช้กฎเจาะจงตัวแปรเอกภพ	$\underline{\forall x\ (W1(x) \Rightarrow W2(x))}$
ได้ว่า	$W1(A) \Rightarrow W2(A)$
จากนั้นใช้กฎโมดัสโพเน็นส์	$\underline{W1(A)\qquad\qquad}$
ได้ว่า	$W2(A)$

ปัญหาหนึ่งของการพิสูจน์ก็ดังเช่นที่แสดงในตัวอย่างข้างต้นนี้คือ จะรู้ได้อย่างไรว่าเวลาที่ใช้กฎเจาะจงตัวแปรเอกภพ จะต้องแทนตัวแปรด้วยค่าคงที่ตัวใด ในตัวอย่างข้างต้นเราแทนตัวแปร x ด้วยค่าคงที่ A และทำให้สามารถอนุมานต่อได้ เพราะเราจะได้ว่า ‘$W1(A)$’ ที่ด้านซ้ายมือในสูตร ‘$W1(A) \Rightarrow W2(A)$’ *เท่ากัน*กับ ‘$W1(A)$’ ที่มีอยู่ แต่ถ้าเราแทน x ด้วยค่าคงที่อื่น เช่น B ก็จะไม่สามารถอนุมานต่อได้ ปัญหานี้เป็นปัญหาที่สำคัญที่เราต้องพิจารณาอย่างละเอียดถี่ถ้วน ดังนั้นส่วนต่อไปที่เราจะศึกษาก็คือการแทนค่าและการทำให้เท่ากัน

การแทนค่าและการทำให้เท่ากัน

การแทนค่า (substitution) คือการแทนพจน์ (*term)* ให้กับตัวแปร พจน์หมายรวมถึงค่าคงที่ ฟังก์ชัน และตัวแปร สูตรที่ได้จากการทำการแทนค่าพจน์ในตัวแปรของสูตรใดๆ เรียกว่า*ตัวอย่างการแทนค่า (substitution instance)* ของสูตรนั้นๆ เช่นตัวอย่างการแทนค่าของสูตร

$$P(x,f(y),B)(3.9)$$

ได้แก่

$$P(z,f(w),B) \quad (3.10)$$

และ

$$P(C,f(A),B) \quad (3.11)$$

เป็นต้น

การแทนค่าและการทำให้เท่ากัน

เราเขียนการแทนค่าอยู่ในรูปของเซตคู่ลำดับ

s = {t1/v1, t2/v2,..., tn/vn} (3.12)

โดยที่ คู่ลำดับ ti/vi หมายถึงพจน์ ti ถูกแทนค่าให้กับตัวแปร vi เมื่อเราใช้การแทนค่าs1 และ s2

s1 = {z/x, w/y} (3.13)

s2 = {C/x, A/y} (3.14)

กระทำกับสูตรที่ (3.9) จะได้สูตรที่ (3.10) และสูตรที่ (3.11) ตามลำดับ เราเขียนสูตรที่ได้จากการแทนค่า s กับสูตร E ด้วย Es จากตัวอย่างที่แล้วจะได้ว่า

P(z,f(w),B) = P(x,f(y),B)s1 (3.15)

P(C,f(A),B) = P(x,f(y),B)s2 (3.16)

การแทนค่าและการทำให้เท่ากัน

จุดประสงค์หนึ่งของการแทนความรู้ในรูปของตรรกะเพรดิเคตก็คือ เมื่อเราเขียนความรู้อยู่ในรูปตรรกะเพรดิเคตแล้ว ทำให้เราสามารถอนุมานหาความรู้ใหม่ๆ ที่แฝงอยู่ในความรู้ที่มีอยู่ได้ และดังเช่นที่แสดงในกฎการอนุมานว่า ปัญหาหนึ่งที่เราพบในการอนุมานหาความรู้ใหม่ก็คือ การแทนค่าให้กับตัวแปรว่าจะต้องใช้ค่าคงที่ใดแทนค่าให้กับตัวแปรใดเพื่อที่จะทำให้พจน์บางตัวเท่ากัน ซึ่งส่งผลให้การอนุมานสำเร็จ เราได้กล่าวถึงการแทนค่าไปแล้ว ส่วนต่อไปที่ก็จะกล่าวคือ *การทำให้เท่ากัน (unification)*เรากล่าวว่า สูตร E1 และ E2 สามารถ*ทำให้เท่ากัน (unify)* ถ้ามีการแทนค่า s ที่ทำให้ E1s = E2s และในกรณีนี้เราเรียก s ว่าเป็น*ตัวทำให้เท่ากัน (unifier)* ของ E1 และ E2

ตัวอย่างเช่น P[x,f(y),B] และ P[x,f(B),B] ทำให้เท่ากันได้โดยมีตัวทำให้เท่ากันคือ s = {A/x, B/y} และผลของการทำให้เท่ากันคือ P[A,f(B),B] สูตรสองตัวใดๆ มักจะมีตัวทำให้เท่ากันมากกว่าหนึ่งตัว แต่ตัวที่เราสนใจคือตัวทำให้เท่ากันที่ใช้การแทนค่าไม่มากเกินความจำเป็น เราเรียกตัวทำให้เท่ากันแบบนี้ว่า *ตัวทำให้เท่ากันกว้างสุด – เอ็มจียู (most generalunifier – mgu)* นิยามได้ดังนี้

การแทนค่าและการทำให้เท่ากัน

*g เป็นตัวทำให้เท่ากันกว้างสุดของ E1 และ E2 ก็ต่อเมื่อ ถ้ามี s ที่เป็นตัวทำให้เท่ากันอื่นของE1 และ E2 แล้ว จะต้องมีตัวทำให้เท่ากัน s' ที่ทำให้ E1s = E1gs' และ E2s = E2gs'*จากตัวอย่างด้านบน เอ็มจียูของ P[x,f(y),B] และ P[x,f(B),B] คือ {B/y} ซึ่งจะเห็นได้ว่าใช้การแทนค่าไม่มากเกินไป ต่างจาก s (={A/x, B/y}) ด้านบนที่มีการแทนค่าเกินความจำเป็นคือ ‘A/x ’ อัลกอริทึมสำหรับหาเอ็มจียูแสดงในตารางที่ 3–2 ต่อไปนี้

ตารางที่ 3–2 อัลกอริทึมการทำให้เท่ากัน

```
Algorithm: Unify(L1,L2)

2. IF L1 or L2 are both variables or constants THEN
      IF L1=L2 THEN return NIL
      ELSE IF L1 is a variable THEN
           IF L1 occurs in L2 THEN return {FAIL} ELSE
              return {L2/L1}
      ELSE IF L2 is a variable THEN
           IF L2 occurs in L1 THEN return {FAIL} ELSE
              return {L1/L2}
      ELSE return {FAIL}
3. IF the predicate or function symbols of L1 and L2
      are not identical
   THEN return {FAIL}
4. IF L1 and L2 have a different number of arguments
   THEN return {FAIL}
5. SUBST := NIL
6. FOR i := 1 TO number of arguments in L1 DO
   5.1 S := Unify(ith argument of L1, ith argument of L2)
   5.2 IF S contains FAIL THEN return {FAIL}
   5.3 IF S <> NIL THEN
           5.3.1 Apply S to the remainder of both L1 and
                 L2
           5.3.2 SUBST := SUBST ∪  S
6. return SUBST
```

การแทนค่าและการทำให้เท่ากัน

ตัวอย่างเช่นกำหนดให้ L1 = P(A, x, h(g(z))) และ L2 = P(z, h(y), h(y)) เราต้องการทำให้ L1 เท่ากับ L2 โดยเรียกอัลกอริทึม Unify(L1,L2) ซึ่งจะได้ขั้นตอนการทำดังนี้

- L1 และ L2 ไม่ใช่ตัวแปรหรือค่าคงที่ ดังนั้นจึงตรวจสอบด้วยขั้นตอนที่ 2 และ 3 ในอัลกอริทึมว่า L1 กับ L2 มีเพรดิเคตตัวเดียวกัน (= P) และมีจำนวนอาร์กิวเมนต์เท่ากัน (= 3) จึงจะทำในขั้นตอนที่ 4 และ 5 ต่อไป ถ้าหากว่าสูตรสองตัวใดที่มีเพรดิเคตไม่เหมือนกันหรือมีจำนวนอาร์กิวเมนต์ไม่เท่ากัน ก็จะไม่สามารถทำให้เท่ากันได้
- ขั้นตอนที่ 4 กำหนดค่าเริ่มต้นให้กับผลลัพธ์ของการแทนค่าที่จะทำให้ L1 เท่ากับ L2 โดยเริ่มต้นให้เท่ากับเซตว่าง (แทนด้วย NIL ในอัลกอริทึม)
- ขั้นตอนที่ 5 เป็นขั้นตอนที่พยายามทำอาร์กิวเมนต์ในตำแหน่งที่ตรงกันของ L1 และ L2 ให้เท่ากัน โดยเริ่มจากอาร์กิวเมนต์ตัวที่ 1 ถึงตัวสุดท้าย

รีโซลูชัน

วิธีการอนุมานทางตรรกเพรดิเคตได้กล่าวไปแล้วสองวิธีคือกฎโมดัสโพเน็นส์และกฎเจาะจงตัวแปรเอกภพ ซึ่งกฎทั้งสองข้อนี้มีข้อจำกัดอยู่ เช่นกฎโมดัสโพเน็นส์จะใช้ได้กับสูตรที่ต้องอยู่ในรูปแบบที่กำหนดเท่านั้นคือ ตัวแรกอยู่ในรูป W1 ⇒ W2 และตัวที่สองเป็น W1 ซึ่งเหมือนกันกับด้านซ้ายมือของสูตรแรก หรือกฎเจาะจงตัวแปรเอกภพก็ใช้ได้กับสูตรที่มีตัวแปรแล้วแทนที่ด้วยค่าคงที่เท่านั้น การใช้งานจึงจำกัดเช่นกัน ในขณะที่ความรู้ที่เขียนอยู่ในตรรกะเพรดิเคตโดยทั่วไปมีหลากหลายรูปแบบ ทำให้การใช้กฎดังกล่าวไม่กว้างขวางเพียงพอหรือมีโอกาสพบรูปแบบที่กฎใช้ได้น้อยมาก

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงกฎการอนุมานอีกวิธีหนึ่งซึ่งสามารถใช้ได้อย่างกว้างขวางเรียกว่า *รีโซลูชัน (resolution)* ที่สามารถใช้กับสูตรทุกตัวที่เป็น*อนุประโยค (clause)*

รีโซลูชัน

อนุประโยคคือสูตรที่เป็น *การหรือของสัญพจน์ (disjunction of literals)* สัญพจน์ก็คือสูตรอะตอมซึ่งอาจมีเครื่องหมายนิเสธอยู่หน้าหรือไม่ก็ได้ กล่าวคืออนุประโยคก็คือสูตรอะตอมหลายตัวมาเชื่อมกันด้วยเครื่องหมาย $\vee$ และสูตรอะตอมบางตัวอาจมีเครื่องหมายนิเสธอยู่บางตัวอาจไม่มี ตัวอย่างของอนุประโยคก็เช่น $P(x) \vee Q(x,y) \vee \sim R(A)$ เป็นต้น ในทางปฏิบัติสูตรที่เราเขียนแทนความรู้อาจไม่อยู่ในรูปของอนุประโยค ดังนั้นก่อนที่เราจะสามารถใช้รีโซลูชันเพื่ออนุมานได้นั้น เราจำเป็นต้องแปลงสูตรให้อยู่ในรูปของอนุประโยคก่อน โดยใช้ขั้นตอนพร้อมทั้งยกตัวอย่างการแปลงสูตรให้เป็นอนุประโยคดังต่อไปนี้

$$(\forall x)\{P(x) \Rightarrow \{(\forall y)[P(y) \Rightarrow P(f(x,y))] \wedge \sim(\forall y)[Q(x,y) \Rightarrow P(y)]\}\}$$

รีโซลูชัน

1. กำจัดเครื่องหมาย $\Rightarrow$: เปลี่ยนรูปของ X $\Rightarrow$ Y เป็น ~X $\vee$ Y

$$(\forall x)\{\sim P(x) \vee \{(\forall y)[\sim P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \sim(\forall y)[\sim Q(x,y) \vee P(y)]\}\}$$

2. ลดขอบเขตของเครื่องหมายนิเสธ: นิเสธแต่ละตัวจะมีขอบเขตไม่เท่ากัน ถ้าพบนิเสธที่คลุมบริเวณกว้าง ก็ให้ลดขอบเขตให้แคบสุดโดยกระจายนิเสธเข้าไปข้างในบริเวณที่มันคลุมอยู่ และเปลี่ยนเครื่องหมายอื่นๆ เป็นตรงข้ามให้หมด เช่นนิเสธของ '$\wedge$' เป็น '$\vee$'นิเสธของ '$\forall$' เป็น '$\exists$' ฯลฯ

$$(\forall x)\{\sim P(x) \vee \{(\forall y)[\sim P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge (\exists y)[Q(x,y) \wedge \sim P(y)]\}\}$$

3. ทำตัวแปรเป็นมาตรฐาน: เปลี่ยนชื่อตัวแปรตามขอบเขตของตัวบ่งปริมาณ เช่นถ้าเราพบว่ามี y ซ้ำกันสองที่ ก็ให้เปลี่ยนชื่อตัวใดตัวหนึ่ง และความหมายของสูตรที่ได้จะไม่เปลี่ยนไปจากเดิม

$$(\forall x)\{\sim P(x) \vee \{(\forall y)[\sim P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge (\exists w)[Q(x,w) \wedge \sim P(w)]\}\}$$

รีโซลูชัน

4. กำจัดตัวบ่งปริมาณมีอยู่: แทนค่าตัวแปรด้วย*ฟังก์ชันสคอเล็ม(Skolem function)* ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่แทนค่าตัวแปรตัวหนึ่งด้วยฟังก์ชันของตัวแปรอื่นๆ ที่ตัวแปรตัวนั้นขึ้นอยู่กับมัน ในกรณีของตัวอย่างสูตรในขั้นตอนที่ 3 ที่ตำ แหน่งของ $(\forall x)\{\ldots(\exists w)[Q(x,w)\wedge{\sim}P(w)]$ ซึ่งจะอ่านได้ว่าสำหรับ x ทุกตัวจะมี w บางตัวที่ทำให้ Q(x, w) และ ~P(w) เป็นจริง แสดงว่าถ้าเลือก x มาหนึ่งตัวจะต้องมี w 1 ตัวที่ทำให้สูตรเป็นจริง หมายความว่า w ขึ้นกับ x หรือเป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งก็คือ w = g(x) เมื่อ g เป็นฟังก์ชันสคอเล็ม

$$(\forall x)\{{\sim}P(x)\vee\{(\forall y)[{\sim}P(y)\vee P(f(x,y))]\wedge[Q(x,g(x))\wedge {\sim}P(g(x))]\}\}$$

5. แปลงให้อยู่ใน*รูปแบบพรีเน็กซ์ (prenex form)*: ย้ายตัวบ่งปริมาณเอกภพทุกตัวมาอยู่หน้าสุด และรูปแบบที่ได้ใหม่นี้เรียกว่ารูปแบบพรีเน็กซ์

$$(\forall x)(\forall y)\{{\sim}P(x)\vee\{[{\sim}P(y)\vee P(f(x,y))]\wedge[Q(x,g(x))\wedge {\sim}P(g(x))]\}\}$$

6. จัดรูปของพรีเน็กซ์ใหม่ให้อยู่ใน*รูปทั่วไปแบบและ (conjuctive normal form)*: รูปที่สูตรทุกตัวเชื่อมกันด้วยเครื่องหมาย '$\wedge$' แต่ภายในสูตรมีแต่เครื่องหมาย '$\vee$' โดยใช้ความสมมูลของสูตรต่อไปนี้ $P\vee(Q\wedge R) = (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

$$(\forall x)(\forall y)\{[{\sim}P(x)\vee{\sim}P(y)\vee P(f(x,y))]\wedge[{\sim}P(x)\vee Q(x,g(x))] \wedge [{\sim}P(x)\vee {\sim}P(g(x))]\}$$

รีโซลูชัน

7. ละเครื่องหมายตัวบ่งปริมาณเอกภพ: เนื่องจากว่า ณ จุดนี้ตัวแปรทุกตัวจะมีตัวบ่งปริมาณเป็นแบบเอกภพเท่านั้น

8. ที่จุดนี้เราจะได้อนุประโยคตั้งแต่ 1 ประโยคขึ้นไป โดยที่แต่ละประโยคเชื่อมกันด้วยเครื่องหมาย $\wedge$ นำอนุประโยคเหล่านั้นมาเขียนเรียงกัน

(1) $\sim P(x) \vee \sim P(y) \vee P(f(x,y))$

(2) $\sim P(x) \vee Q(x,g(x))$

(3) $\sim P(x) \vee \sim P(g(x))$

9. เปลี่ยนชื่อตัวแปร: เปลี่ยนชื่อตัวแปรโดยตัวแปรเดียวกันที่ปรากฏในหลายอนุประโยคให้เขียนใหม่ด้วยตัวแปรคนละตัว

(1) $\sim P(x1) \vee \sim P(y) \vee P(f(x1,y))$

(2) $\sim P(x2) \vee Q(x2,g(x2))$

(3) $\sim P(x3) \vee \sim P(g(x3))$

รีโซลูชัน

รีโซลูชันของอนุประโยคพื้นฐาน

ก่อนที่จะอธิบายถึงรีโซลูชันของอนุประโยคทั่วไป ขอกล่าวถึงรีโซลูชันของ*อนุประโยคพื้นฐาน (ground clause)* ก่อน ซึ่งจะง่ายกว่าของอนุประโยคทั่วไป อนุประโยคพื้นฐานคืออนุประโยคที่ไม่มีตัวแปร การทำรีโซลูชันสำหรับอนุประโยคพื้นฐานจะรับอินพุตเป็นอนุประโยคพ่อแม่ (parent clause) 2 ประโยค และจะให้อนุประโยคเป็นเอาต์พุต 1 ประโยค

รีโซลูชันทั่วไป

กรณีของรีโซลูชันทั่วไปที่กระทำกับอนุประโยคที่มีตัวแปรด้วยนั้น ขั้นตอนจะซับซ้อนกว่าเดิม ซึ่งเราต้องใช้การทำให้เท่ากันร่วมด้วยเพื่อทำให้อนุประโยคพ่อแม่ประกอบด้วย*สัญพจน์เติมเต็ม (complimentary literals)* สัญพจน์เติมเต็มคือสัญพจน์ที่เหมือนกันทุกประการเว้นแต่ว่าตัวหนึ่งมีเครื่องหมายนิเสธส่วนอีกตัวไม่มี เช่น ~Q(z) กับ Q(z) เป็นต้น ในการอธิบายการทำรีโซลูชันทั่วไป จะเขียนแทนอนุประโยคด้วยเซตของสัญพจน์ เช่น~P(z,f(A)) V ~Q(z) เขียนแทนด้วย {~P(z,f(A)),~Q(z)} เป็นต้น ขั้นตอนของรีโซลูชันทั่วไป

รีโซลูชัน

การปฏิเสธแบบรีโซลูชัน

จากที่ได้แสดงให้เห็นข้างต้นว่าการทำรีโซลูชันจะทำให้เราหาความรู้ที่แฝงอยู่ในความรู้ที่มีอยู่ได้ และในหลายๆ กรณีเรามีความรู้ที่แสดงอยู่ในรูปตรรกะเพรดิเคตและเราต้องการพิสูจน์อนุประโยคตัวใหม่ใดๆ ว่าเป็นผลสรุปของความรู้ที่มีอยู่หรือไม่ วิธีการพิสูจน์ก็อาจทำโดยการเลือกอนุประโยคพ่อแม่ 2 ประโยคแล้วหารีโซเวนท์ ถ้ารีโซเวนท์เป็นความรู้ใหม่ที่เราต้องการพิสูจน์ก็แสดงว่าเราพิสูจน์สำเร็จ ถ้าไม่ใช่เราก็อาจเลือกอนุประโยคพ่อแม่ 2
ประโยคอื่นๆ แล้วลองทำรีโซลูชันดู หรืออาจนำรีโซเวนท์ที่ได้ก่อนหน้านี้มาจับคู่กับอนุประโยคอื่นเพื่อเป็นอนุประโยคพ่อแม่แล้วทำรีโซลูชันต่อไป อย่างไรก็ดีการพิสูจน์แบบนี้อาจไม่มีเป้าหมายที่ชัดเจน ทำให้การพิสูจน์เสียเวลาในการคำนวณมาก เรามีวิธีการซึ่งเน้นที่เป้าหมายในการพิสูจน์เพื่อทำให้การพิสูจน์ทำได้ดีขึ้น เราเรียกวิธีการที่จะนำเสนอนี้ว่า *การปฏิเสธแบบรีโซลูชัน (resolution refutation)* ก่อนอื่นขอกล่าวถึง*ความขัดแย้ง(contradictory)* ที่ใช้ในการพิสูจน์โดยการปฏิเสธแบบรีโซลูชัน

แบบฝึกหัด

1. เรานิยามตัวเชื่อมตัวใหม่ในตรรกะเพรดิเคตเรียกว่า exclusive-or เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\oplus$ โดยมีตารางค่าความจริงดังนี้

P	Q	P $\oplus$ Q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

จงเขียนสูตรที่มีความหมายสมมูลกับ P $\oplus$ Q โดยใช้ตัวเชื่อม $\wedge$, $\vee$ และ ~ เท่านั้น

แบบฝึกหัด

2. จงบอกว่าคู่ของสูตรในแต่ละข้อย่อยต่อไปนี้ว่าสามารถทำให้เท่ากันได้หรือไม่ ถ้าได้ให้เขียนแสดงเอ็มจียูของสูตรทั้งสอง (ตัวอักษรเล็กแสดงตัวแปรหรือฟังก์ชัน ตัวอักษรใหญ่แทนชื่อเพรดิเคตหรือค่าคงที่)

2.1 P(x,B,B) P(A,y,z)

2.2 P(g(f(v)),g(u)) P(x,x)

2.3 P(x,f(x)) P(y,y)

2.4 R(f(y),x) R(x,f(B))

2.5 R(f(y),y,x) R(x,f(A),f(v))

แบบฝึกหัด

3. พิจารณาประโยคต่อไปนี้

All horses are faster than every dog.

There is a greyhound that is faster than every rabbit.

If x is faster than y and y is faster than z, then x is faster than z.

If x is a greyhound then x is a dog.

HaHa is a horse.

RaRa is a rabbit.

(a) จงเขียนประโยคด้านบนทั้งหมดให้อยู่ในรูปของสูตรทางตรรกะเพรดิเคต

(b) จงแปลงสูตรที่ได้ให้อยู่ในรูปของอนุประโยค

(c) จงพิสูจน์ว่า "HaHa is faster than RaRa." โดยใช้การปฏิเสธแบบรีโซลูชัน

THANK YOU
FOR
YOUR ATTENTION

จบบทที่ 3